E.N.S.E.T. section A1 session 1987

MATHEMATIQUES 2 Durée : 4 heures

Soient V l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle, $\|v\|$ la norme d'un vecteur v de V et L l'espace vectoriel des applications linéaires de V dans V.

PREMIÈRE PARTIE

1. Montrer que l'application définie par $(u_1 u_2) \to \text{Trace } ({}^*u_1 u_2)$, où u_1 et u_2 sont éléments de L et ${}^*u_1$ l'adjoint de u_1 est un produit scalaire sur L.

Dans toute la suite du problème, L sera muni de la structure euclidienne induite par ce produit scalaire et N désignera la norme associée.

2. On considère l'ensemble E des applications u de L satisfaisant pour tout vecteur v de V l'inégalité $\|u(v)\| \leqslant \|v\|$. Montrer que E contient la boule unité de L, qu'il est contenu dans la boule de rayon $\sqrt{n}$ de L, et enfin qu'il est fermé et convexe.

On appelle *enveloppe convexe* d'une partie A d'un espace vectoriel réel l'ensemble des vecteurs de cet espace qui peuvent s'écrire comme un barycentre à coefficients positifs d'éléments de A.

3. Soit F l'enveloppe convexe des applications orthogonales de V dans V. Montrer l'inclusion $F \subset E$.

4. On se propose d'établir l'inclusion inverse : $F \supset E$. Soit u un élément de E.

a. Montrer qu'il existe un vecteur v_0 de norme 1 dans V et un réel m tels que $\|u(v_0)\| = m$ et $\|u(v)\| \leqslant m\|v\|$ pour tout v de V.

b. Soit p une transformation orthogonale de V telle que $m\,p(v_0) = u(v_0)$. Montrer que l'orthogonal de v_0 dans V est stable par $p^{-1}u$. À cet effet, on pourra calculer la différentielle de l'application $v \to \dfrac{\|u(v)\|^2}{\|v\|^2}$ au point v_0.

c. Terminer la preuve en considérant la restriction de $p^{-1}u$ à l'orthogonal de v_0.

5. Soit M (u) la borne inférieure des nombres réels positifs k tels que l'image de E par l'homothétie de rapport k contienne u.

a. Établir que M est une norme sur L.

b. Calculer M (u) quand u est une transformation orthogonale et quand u est une projection orthogonale sur une droite de V.

c. La norme M est-elle euclidienne (c'est-à-dire induite par un produit scalaire défini sur l'espace vectoriel L) ?

6. Dans cette question on suppose $n = 2$ et on désigne par e_1 et e_2 la base naturelle de V.

a. Soient v_1 un vecteur de V de norme c et u un élément de L tel que $u(e_1) = v_1$. Montrer que u est dans E si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$c \leqslant 1$.

$u(e_2)$ se trouve dans l'ellipse de centre O, de petit axe portant v_1 et dont les longueurs des demi-axes sont 1 et $\sqrt{1 - c^2}$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale quadruple étendue au domaine D de $\mathbb{R}^4$ formé des points (x, y, z, t) tels que la matrice $\begin{vmatrix} x & z \\ y & t \end{vmatrix}$ soit élément de E :

$$\iiiint_D dx\,dy\,dz\,dt.$$

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME PARTIE

Soit G l'enveloppe convexe dans L de l'ensemble des transformations orthogonales de déterminant 1.

1. Donner G quand V est de dimension 1 ou 2.

À partir de maintenant on suppose $n \geqslant 2$.

2. Majorer par $n - 2$ la trace des transformations orthogonales de déterminant -1.

3. Établir que l'homothétie de V de rapport k, où $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{n-2}{n}$, est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des transformations orthogonales de déterminant -1.

4. Soient k un réel positif ou nul et u une transformation orthogonale de V de déterminant -1. Établir que ku est dans G si et seulement si :

$$0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{n}.$$

5. Montrer que G contient la boule de L de rayon $\dfrac{n-2}{n}$.

6. Dans cette question on suppose $n = 3$.

a. Établir que les éléments de G de trace -1 sont symétriques.

b. Soit u un élément de L symétrique et de trace -1. Établir que pour que u soit dans F (resp. G), il faut et il suffit que l'on ait :

$$\det(\mathrm{Id} - u) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \det(\mathrm{Id} + u) \geqslant 0.$$

N. B. — La deuxième partie du problème est indépendante des questions 5 et 6 de la première partie. Ces questions 5 et 6 sont également indépendantes entre elles.